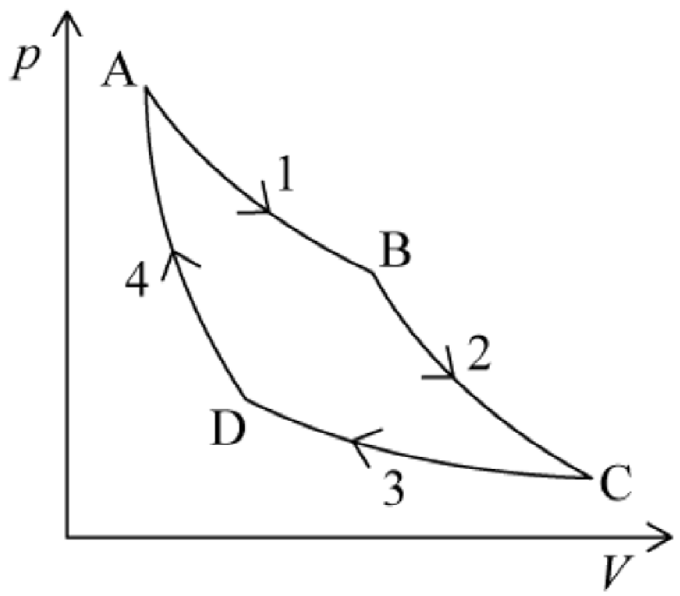
カルノーサイクル

カルノーサイクルは、可逆



仕事 ＝ 圧力 × 体積
W ＝ P × V　　（ ΔV……＋膨張 ， －圧縮）

1．A⟶B（等温膨張）

等温（ΔU＝0） ， 双曲線
外部から熱Eを吸収する。

PV＝（nRT）一定　$\therefore P=\dfrac{k}{V}$（双曲線） $P\propto\dfrac{1}{V}$

2．B⟶C（断熱膨張）

B⟶Cの圧力変化は、A⟶Bの圧力変化より大きい。（断熱曲線：変化量大）
Q＝0 ，温度低下

3．C⟶D（等温圧縮）

等温（ΔU＝0） ， 双曲線

外部に熱Eを放出する。

4．D⟶A（断熱圧縮）

D⟶Aの圧力変化は、C⟶Dの圧力変化より大きい。（断熱曲線：変化量大）
Q＝0 ，温度上昇

1．A⟶B（等温膨張）

内部エネルギーの増加はないから、加えられた熱Eは、外部への仕事となる。
（膨張）

2．B⟶C（断熱膨張）

熱Eは加わっていないのに仕事をするから、（内部エネルギーは減少し）温度は下がる。

3．C⟶D（等温圧縮）

（外部から）仕事をされたのに、等温ということは、外部に熱Eを放出する。
（圧縮された）　（内部エネルギーの増加がない）

4．D⟶A（断熱圧縮）

熱Eは加えられていないが、圧縮されているので、（内部エネルギーは増加し）温度は上がる。
（断熱）　（負の仕事）

カルノーサイクルの熱効率

⟶（ 熱効率最大の理想的熱機関 ）

（熱効率 η ：イータ）

$$\eta=\frac{W}{Q_H}=\frac{Q_H-Q_L}{Q_H}$$

$$=1-\frac{Q_L}{Q_H}$$

$$=1-\frac{T_L}{T_H}$$

$$\boxed{\eta=1-\frac{T_L}{T_H}}$$

①．A ⟶ B（等温可逆膨張）

高熱源に接触させる。 T_H において、体積は $V_1 \longrightarrow V_2$ 。
$\Delta U = 0$ ， Qはすべて仕事に使われる。

−（マイナス）外部に仕事をする

＋（プラス）内部に熱量を加える。系が熱量を得る。

$$-W_{A\to B} = +Q_H = \int_{V1}^{V2} P\,dV$$

$$= \int_{V1}^{V2} \frac{nRT_H}{V}\,dV$$

$$= nRT_H \int_{V1}^{V2} \frac{1}{V}\,dV$$

$$= nRT_H \Big[\ln V\Big]_{V1}^{V2}$$

$$= nRT_H(\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$= nRT_H\left(\ln \frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\boxed{\therefore\ W_{A\to B} = -nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (<0)\ \text{……外部に仕事をする。}}$$

なぜならば

膨張（$V_2 > V_1$）だから、 $\ln \frac{V_2}{V_1} > 0$ $\therefore -nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1} < 0$

②．B ⟶ C（断熱可逆膨張）

体積 $V_1 \longrightarrow V_2$ に膨張 、 温度は $T_H \longrightarrow T_L$ となる。
$Q = 0$ 、内部エネルギーは減少，温度は下がる。

$$-W_{B\to C} = -|U_H - U_L| = -|\Delta U|$$

減少する

仕事をした分だけ、内部エネルギーは減少する。理想気体の温度は、内部エネルギーで決まるので、温度は低下する。

※ $dU = nC_V\,dT$

$$W_{B\to C} = |\Delta U| = \int_{TH}^{TL} nC_V\,dT$$

$$= nC_V \int_{TH}^{TL} 1\,dT$$

$$= nC_V \Big[T\Big]_{TH}^{TL}$$

$$= nC_V(T_L - T_H) \quad (<0)$$

マイナス………外部に仕事をする。

$$\boxed{\therefore\ W_{B\to C} = nC_V(T_L - T_H) \quad (<0) \quad \text{……外部に仕事をする。}}$$

なぜならば、 $T_L - T_H < 0$ $\therefore$ $nC_V(T_L - T_H) < 0$

断熱膨張での、※ $dU = nC_V\,dT$ の証明

$U(T,V)$……UはT,Vの関数

⇩

$$\boxed{dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV}$$

dＵの定義式の全微分をとると（内部エネルギーは、ＴとＶの関数と考え、全微分をとると）

$$dU = \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV\right\}$$

$$= \overset{※1}{n C_V\,dT} + \overset{※2}{\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV}$$

$$= n C_V\,dT$$

※1

$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$ ……（定積比熱の定義から）

$$\therefore \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT = n C_V\,dT$$

※2

Ｔが一定（ΔＴ＝０）のとき、内部エネルギーＵは一定（ΔＵ＝０）だから、∂Ｕ＝０。

よって

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 0$$ である。

ゆえに ※ $dU = nC_V\,dT$ が証明された。

③．Ｃ⟶Ｄ（等温可逆圧縮）

低熱源に接触させる。　T_L において、体積は $V_3 \longrightarrow V_4$ に圧縮。
ΔＵ＝０

＋（プラス）外部から仕事をされる

－（マイナス）外部に熱量を放出。系が熱量を失う。

$$+\ W_{C\to D} = -Q_L = \int_{V3}^{V4} P\,dV$$

$$= \int_{V3}^{V4} \frac{nRT_L}{V}\,dV$$

$$= nRT_L \int_{V3}^{V4} \frac{1}{V}\,dV$$

$$= nRT_L \Big[\ell n\, V\Big]_{V3}^{V4}$$

$$= nRT_L (\ell n\, V_4 - \ell n\, V_3)$$

$$= nRT_L \left(\ell n \frac{V_4}{V_3}\right)$$

$$= nRT_L\, \ell n \frac{V_4}{V_3}$$

$$\boxed{\therefore W_{C\to D} = -nRT_L\, \ell n \frac{V_4}{V_3} \quad (>0)}$$ ……外部から仕事をされる。

なぜならば

圧縮（$V_4 < V_3$）だから、$\ell n \dfrac{V_4}{V_3} < 0$　　$\therefore -nRT_L\, \ell n \dfrac{V_4}{V_3} > 0$

④．D ⟶ A（断熱可逆圧縮）

体積 $V_4 \longrightarrow V_1$ に圧縮　、温度は $T_L \longrightarrow T_H$ となる。
$Q=0$　　、内部エネルギーは増加，温度は上がる。

$$W_{D\to A} = -|\Delta U| = \int_{T_L}^{T_H} n C_V \, dT$$

$$= n C_V [T]_{T_L}^{T_H}$$

$$= n C_V (T_H - T_L) \quad (>0)$$

プラス……外部から仕事をされる。

$W_{B\to C}$ と $W_{D\to A}$ は、方向が違うだけで大きさは同じ（同じ仕事量）。

$\therefore W_{D\to A} = -W_{B\to C}$　……Ⅳ

$\boxed{\therefore W_{D\to A} = n C_V (T_H - T_L) \quad (>0) \quad \text{……外部から仕事をされる。}}$

なぜならば、$T_H - T_L > 0$　$\therefore$　$n C_V (T_H - T_L) > 0$

系がなした全仕事Wは、

1．A→B　$W_{A\to B} = W_1$

2．B→C　$W_{B\to C} = W_2$

3．C→D　$W_{C\to D} = W_3$

4．D→A　$W_{D\to A} = W_4$　として

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$

$$= W_1 + W_2 + W_3 - W_2 \quad \text{（Ⅳ式より）}$$

$$= W_1 + W_3$$

$$= -nRT_H \ln \frac{V_2}{V_1} - nRT_L \ln \frac{V_4}{V_3}$$

$$= -nR \left(T_H \ln \frac{V_2}{V_1} + T_L \ln \frac{V_4}{V_3} \right)$$

$$\therefore -W = nR \left(T_H \ln \frac{V_2}{V_1} + T_L \ln \frac{V_4}{V_3} \right) \quad \text{……A式}$$

$V_A = V_1$, $V_B = V_2$, $V_C = V_3$, $V_D = V_4$ として

$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{V_3}{V_4}$ の証明

断熱過程において

$$dU = nC_v\,dT \quad (= dW) = -P\,dV \qquad (\because ③より)$$

$$= -\frac{nRT}{V}dV$$

$$\therefore \quad nC_v\,dT = -\frac{nRT}{V}dV$$

$$\therefore \quad C_v\,dT = -\frac{RT}{V}dV$$

$$\therefore \quad C_v\frac{1}{T}dT = -R\frac{1}{V}dV$$

$$\therefore \quad C_v\int_{T4}^{T1}\frac{1}{T}dT = -R\int_{V4}^{V1}\frac{1}{V}dV$$

$$C_v\Big[\ell n V\Big]_{T4}^{T1} = -R\Big[\ell n V\Big]_{V_4}^{V1}$$

$$C_v\,\ell n\frac{T_1}{T_4} = -R\,\ell n\frac{V_1}{V_4}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{T_1}{T_4}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{-R} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{R}$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

ここで $T_1 = \dfrac{P_1V_1}{nR}$, $T_4 = \dfrac{P_4V_4}{nR}$

よって $$\frac{T_1}{T_4} = \frac{\dfrac{P_1V_1}{nR}}{\dfrac{P_4V_4}{nR}} = \frac{P_1V_1}{P_4V_4} \quad \cdots\cdots ⓑ$$

ⓑをⓐに代入して

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⓐ$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}} = \frac{P_1V_1}{P_4V_4}$$

$$\therefore \quad P_4V_4V_4^{\frac{R}{C_V}} = P_1V_1V_1^{\frac{R}{C_V}}$$

$$\therefore \quad P_4\,V_4^{\,1+\frac{R}{C_V}} = P_1\,V_1^{\,1+\frac{R}{C_V}}$$

$$\therefore \quad P_4\,V_4^{\,1+\frac{R}{C_V}} = P_1\,V_1^{\,1+\frac{R}{C_V}}$$

$$\therefore \quad P_4\,V_4^{\gamma} = P_1\,V_1^{\gamma} \qquad (PV^{\gamma} = 一定)$$

熱容量比 $$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} \qquad (\because C_P - C_V = R)$$

$$= 1 + \frac{R}{C_V}$$

$$\therefore \quad \frac{R}{C_V} = \gamma - 1 \quad \cdots\cdots ⓒ$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\frac{R}{C_V}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ⓐ \quad , \qquad \frac{R}{C_V} = \gamma - 1 \quad \cdots\cdots ⓒ$$

ⓐにⓒを代入して

$$\frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} \quad \cdots\cdots ⓓ$$

同様にして

$$C_V \int_{T_2}^{T_3} \frac{1}{T}\,dT = -R \int_{V_2}^{V_3} \frac{1}{V}\,dV$$

$$\therefore \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_4}{T_1} \quad \cdots\cdots ⓔ \qquad (T_1 = T_2 \ , T_3 = T_4 \text{だから})$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{T_4} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

ⓓ、ⓔより

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\therefore \quad \frac{V_4}{V_1} = \frac{V_3}{V_2}$$

$$\therefore \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad \cdots\cdots ⓕ$$

よって、証明された。

ⓕとAを用いて、系が（外部に）なした全仕事$-W$を、式で表すと

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad \cdots\cdots ⓕ$$

$$-W = nR\left(T_H \, \ell_n \frac{V_2}{V_1} + T_L \, \ell_n \frac{V_4}{V_3}\right) \quad \cdots\cdots A$$

$$= nR\left(T_H \, \ell_n \frac{V_2}{V_1} - T_L \, \ell_n \frac{V_3}{V_4}\right)$$

$$= nR\left(T_H \, \ell_n \frac{V_2}{V_1} - T_L \, \ell_n \frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$= nR \, \ell_n \frac{V_2}{V_1}\left(T_H - T_L\right)$$

よって、効率ηは、 $\eta = \dfrac{Q_H - Q_L}{Q_H}$

$$= \left|\frac{-W}{Q_H}\right|$$

$$= \frac{nR \, \ell_n \frac{V_2}{V_1}\left(T_H - T_L\right)}{nRT_H \, \ell_n \frac{V_2}{V_1}}$$

$$= \frac{T_H - T_L}{T_H}$$

$$= 1 - \frac{T_L}{T_H}$$