

シュテファン - ボルツマンの法則 Stefan (1835 ~ 93) ・ Boltzmann (1844 ~ 1906)

物質を塊として巨視的に見た場合、物質は、その表面温度（絶対温度）の4乗に比例して、電磁波としてエネルギーを放出する。

黒体が出す熱放射エネルギーの総量は、その絶対温度をTとすると T^4 に比例するという法則。

黒体の単位面積から単位時間に放射される電磁波のエネルギーを、すべての波長について総計したものをSとすると、 $S = \sigma T^4$ と書ける。（S：放射強度）

この比例定数 σ (シグマ) をシュテファン - ボルツマンの定数といい、

$$\sigma \text{ (シグマ)} = 5.67032 \times 10^{-8} \text{ (W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}\text{)} \text{ で表される。}$$

ボルツマンが証明したのは S が T^4 に比例するという事実までであったが、このころから熱放射の研究が盛んになり、量子論誕生の動機となった。その結果、 σ の値は、黒体放射と空洞放射とが等しいことを用い、空洞放射に対するプランクの放射公式を使えば $\sigma = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{k^4}{15 c^2 h^3}$ で与えられることがわかった。

$$\sigma = \frac{2}{15} \pi^5 \frac{k^4}{15 c^2 h^3}$$

(k：ボルツマン定数、c：光速、h：プランク定数)

【問題】

日本の年間一次エネルギー消費を、約 2.277×10^{19} J として、これを日本の平地面積約 $1.14 \times 10^{11} \text{ m}^2$ で消費しているものとして考え、さらに都市部は平地の約5倍として、都市部での地表温度を算出なさい。

ただし、太陽放射に直交する面に投影された、地球表面が受け取る太陽放射の平均量は、 $0.49 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{min)}$ とする。また、平均地表温度は、 15°C とする。

【参考】 太陽定数 $1.96 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{min)}$

【解答】

$$E = \sigma T^4 \quad (E : \text{放射強度}, \sigma \text{ (シグマ)} : \text{シュテファン - ボルツマン定数}, T : \text{絶対温度})$$

$$\begin{aligned} E &= \sigma T^4 \\ &= \frac{5.67 \times 10^{-8}}{\text{(W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}\text{)}} \times \frac{(273 + 15)^4}{\text{K}^4} = \frac{390}{\text{J} \cdot \text{S}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}} \text{ (W/m}^2\text{)} \end{aligned}$$

【参考】

(太陽放射に直交する面に投影された)地球表面が受け取る太陽放射の平均量 $0.49 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{min)}$ は、

$$0.49 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{min)} \doteq 342 \text{ (w/m}^2\text{)}$$

$$0.49 \text{ (cal/cm}^2 \cdot \text{min)} = \frac{0.49 \text{ cal}}{1 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ min}} = \frac{(0.49 \times 4.19) \text{ J}}{10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 60 \text{ s}} \doteq 342.18 \text{ (w/m}^2) \quad \because 1 \text{ cal} = 4.19 \text{ J}$$

$$\frac{390 \text{ (w/m}^2\text{)}}{342 \text{ (w/m}^2\text{)}} = \frac{X}{100} \quad X \doteq 114 \dots\dots 342 \text{ を } 100 \text{ としたときの、} 15^\circ\text{C} \text{ における放射強度。}$$

日本の都市部でのエネルギー消費から見積もった、地表での放射エネルギー増加量 (ΔE) は、 2.277×10^{19} J (日本の年間一次エネルギー消費量) を、 $1.14 \times 10^{11} \text{ m}^2$ (日本の平地面積) で消費するとして、

$$\frac{2.277 \times 10^{19}}{1.14 \times 10^{11} \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} \doteq 6.3 \text{ (w/m}^2\text{)}$$

$6.3 \text{ (w/m}^2\text{)}$ は平均値であるから、都市部は仮に5倍として $31.5 \text{ (w/m}^2\text{)}$ とし、 $E = \sigma T^4$ 式に代入すると

$$\begin{aligned} E &= \sigma T^4 \\ (390 + 31.5) \text{ (W} \cdot \text{m}^{-2}\text{)} &= 5.67 \times 10^{-8} \text{ (W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}\text{)} \times T^4 \text{ (K}^4\text{)} \\ &\vdots \\ &15^\circ\text{C} \text{ における放射強度。} \end{aligned}$$

$$\therefore T^4 = \frac{421.5 \times 10^8}{5.67}$$

$$\therefore T \doteq 293.6 \text{ (K)} = (293.6 - 273) ^\circ\text{C} = 20.6 ^\circ\text{C}$$

よって、 $(20.6 - 15 = 5.6) \text{ } 5.6 ^\circ\text{C}$ の気温上昇になる。