指数・対数

指数

$$10^{5} = 10^{2} \times 10^{3} = 10^{2+3} = 10^{5}$$

$$10^{3} = \frac{10^{5}}{10^{2}} = 10^{5} \times 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^{3}$$

対数

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

ⓐ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

ⓑ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

ⓒ $\log_a M^{P} = P \log_a M$

例）

ⓐ $5 = \log_{10}(100 \times 1000) = \log_{10} 100 + \log_{10} 1000$
$= 2 + 3$

ⓑ $1 = \log_{10} \frac{1000}{100} = \log_{10} 1000 - \log_{10} 100$
$= 3 - 2$

ⓒ $4 = \log_{10} 10000 = \log_{10} 100^{2} = 2 \log_{10} 100$
$= 4$

あるいは

$4 = \log_{10} 10^{4} = 4$

① $$\boxed{\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}}$$

底の交換公式

② $\log_a b \cdot \log_b M = \log_a M$

③ $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

例）

① $\log_2 6 = \dfrac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2} = \dfrac{\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 2}$

① $\log_{\frac{1}{3}} 12 = \dfrac{\log_{10} 12}{\log_{10} \frac{1}{3}} = \dfrac{2\log_{10} 2 + \log_{10} 3}{-\log_{10} 3}$

② $\log_2 3 \cdot \log_3 16 = \log_2 16 = 4$

③ $\log_5 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 5} = \dfrac{1}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} = \dfrac{1}{1 - \log_{10} 2}$

【問題】

$(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 - \log_9 2)$ を計算せよ。

$$
\begin{aligned}
&(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 - \log_9 2) \\
=& \log_2 3 \cdot \log_3 4 - \log_2 3 \cdot \log_9 2 \\
&+ \log_4 9 \cdot \log_3 4 - \log_4 9 \cdot \log_9 2 \\
=& \log_2 4 - \log_9 3 + \log_3 9 - \log_4 2 \\
=& 2 - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_2 3 \cdot \log_3 4 &= \log_2 4 \quad (\because \text{①より}) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log_2 3 \cdot \log_9 2 &= \log_9 2 \cdot \log_2 3 \\
&= \log_9 3 \\
&= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 9} = \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

あるいは

$$\log_2 3 \cdot \log_9 2 = \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 9} = \log_2 3 \times \frac{1}{2\log_2 3} = \frac{1}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\log_4 9 \cdot \log_3 4 &= \log_3 4 \cdot \log_4 9 \\
&= \log_3 9 = 2
\end{aligned}
$$

$$\log_4 9 \cdot \log_9 2 = \log_4 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 2}{2\log_{10} 2} = \frac{1}{2}$$

微分

$$(X^n)' = nX^{n-1}$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$$(\log X)' = \frac{1}{X}$$

$$\boxed{(\ell n X)' = \frac{1}{X}}$$

$$\underset{\sim\sim\sim\sim}{\ell n X} = \log_e X$$

自然対数（natural logarithm）

$$(\log_a X)' = \frac{1}{X\log a}$$

なぜならは、底の交換公式を用いて

$$(\log_a X)' = \left(\frac{\log X}{\log a}\right)' = \frac{1}{\log a}(\log X)'$$

$$= \frac{1}{X\log a}$$

微分・積分

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \quad (C：積分定数)$$

$$\frac{d}{dx}\ell n X = \frac{1}{X}$$

$$\int \frac{1}{X}\,dx = \ell n X + C \quad (C：積分定数)$$

ニコラス・メルカトル（ オランダ 1668 ）

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0 \quad \text{(オイラーの等式)}}$$

e ：ネイピア数

e = 2.71828182845904523536 ………………

自然対数……… ネイピア数を底とする対数（logarithm）

オイラー　1707-83　Leonhard Euler

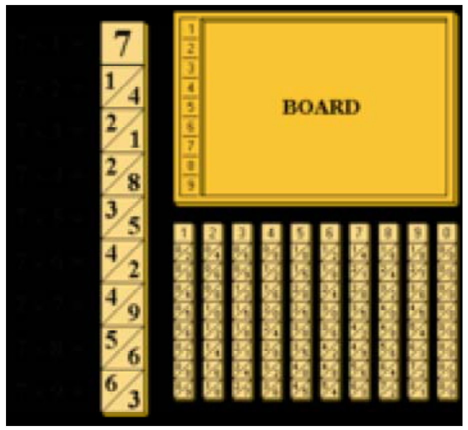
スイスのバーゼルに生まれ，その地の大学のヨハン·ベルヌーイに数学の能力を認められた。18世紀においては，第一線の科学者は絶対主義王権のもとで科学アカデミーに所属して研究活動に専念するのがつねであり，オイラーもペテルブルグ，ベルリンの科学アカデミーで活躍した。1735年に1眼の明を失い，さらに66年には全盲になったが，多産な計算をし続け，その著作，論文，遺稿は1911年以降《全集》としていまだに刊行中である。1748年の名教科書《無限解析序論》は，簡明な記号を用いて代数学，微分積分学，三角法を記述し，ラグランジュ，ラプラス，ガウスらの従うところとなった。《微分計算教程》(1755)，《積分計算教程》(1768-74)も大きな影響力をもった。1744年刊の《与えられた性質を有する極大·極小曲線を見いだす方法》は，独創的な変分法の書であり，いわゆるオイラーの方程式が導きだされている。応用数学の諸分野でも多産で，《力学》(1736)はニュートン力学をライプニッツ的微分積分学で書き換える試みであり，ほかにも剛体力学，天体力学，水力学に関して解析学的計算を展開した。オイラーはまた，ケーニヒスベルクの七つの橋の問題(一筆書き)，多面体論などで重要な貢献を行った。しかし，〈無限〉の数学的扱いにおいてはしばしば不注意な計算に走り，19世紀の数学者(とくに，コーシーら)の厳密な再定式化の試みによって吟味されなければならなかった。無明のオイラーは，光の世紀，啓蒙の時代の最大の数学者であったといってよい。

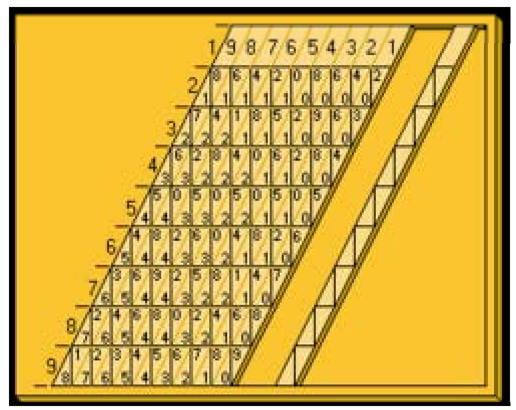
ジョン・ネイピア（John Napier,1550 - 1617）

スコットランドのバロン。数学者、物理学者、天文学者、占星術師としても知られる。
ネイピア数（Napier's constant）は数学定数の一つであり、自然対数の底として用いられる。対数の研究を行ったイギリスの数学者ジョン・ネイピアの名がつけられているが、ネイピアが発見したわけではない。文字 "e" による表記は、オイラーによるものである。
指数関数 a^x を微分しても a^x ならば、 $a = e$ であることや、1/x の積分として定義された自然対数の底でもあることを示した。従って一般には自然対数の底と呼ばれることが多い。
その値は　e = 2.71828 18284 59045 23536 02874 71352 …
ジョン・ネイピアは、スコットランドのバロンであり、熱心なプロテスタントである。幅広い事に興味を持って研究した人物で、特に、対数の発見者として知られる。
使用人の誰かが屋敷の物を盗んでいるとにらんだネイピアは、鶏に煤を塗り、暗い部屋に置いた。犯人が触れば鶏がそれを知らせるといって、全ての使用人に鶏を触りに行かせた。罪の発覚を恐れた犯人は触らずに戻ってきたため、使用人達の手のひらの汚れから、犯人を特定した。という逸話でも知られる、個性的な発想に恵まれた発明家である。
ネイピアは、自分の領地の収穫を増やすために肥料や揚水機の研究をしたり、スペインの侵攻を恐れ、軍事兵器を発案したりもしている。
ネイピアの数ある発明の中で、後世に特に大きな影響を与えたものは、対数とネイピアの骨である。いずれも科学で必要な計算を少しでも簡単にしようとして生み出された計算のための技術であり、他の人々の手によって形が変えられているものの、現代の科学技術の礎ともなっている。また、小数点の発案者でもある。
宗教的活動も活発に行っており、ヨハネの黙示録を独自に解釈し、カトリック教会やローマ教皇を非難した著書も広く読まれた。

ネイピアの骨

　ネイピアの骨は、ギリシャ語で「棒」を意味する ραβδος（rabdos）と、「言葉」を意味する λόγος（logos）の合成語である ラブドロジー（Rabdology）とも呼ばれる。
ネイピアは、1617 年の末にエディンバラで Rabdologiæ という名前で発表した。ネイピアの骨には九九の表が組み込まれており、複数の桁からなる正の整数と、1 桁の正の整数の掛け算の計算を足し算だけで済ますことができる。
その応用として、複数桁同士の掛け算や割り算、平方根を求める計算ができる。
ネイピアの骨は、枠を持つ基盤（図中では「BOARD」）と、乗算や除算を行うために基板上に配置されるネイピアの棒によって構成される。基盤の左側には、1 から 9 までの番号が順番に書かれた 9 個の正方形が並べられている。ネイピアの棒は、木や金属、もしくは厚紙でできた細長い板である。ネイピアの棒は 9 個の正方形に区切られており、一番上を除く全ての正方形が斜線によって左上と右下に分けられている。一番上の正方形には 1 桁の数字が書かれており、それ以外の正方形には、一番上の正方形に書かれた数を 2 倍した数から 9 倍した数までが順番に書かれている。ここで、正方形の左上の部分には 10 の位の数字が、右下の部分には 1 の位の数字が書かれている。10 未満の数の場合、左上の部分の数字は 0 である。一番上の正方形に書かれている数字は、0 から 9 までであるが、0 の棒は全ての数字が 0 であり、無くても問題ない。
平方根の計算を行う場合は、これ以外に平方数を並べた棒が必要になる。





改良されたネイピアの骨